ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται η σταθερή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=c$, όπου $c\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $f'(x)=0$.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

γ) Αν f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\geq 0$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0.$$

δ) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x,y συνδέονται με τη σχέση $y=f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ε) Κάθε συνάρτηση "$1-1$" είναι και γνησίως μονότονη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε $f^{-1}(x)=\frac{1}{4-x}$, $x\in(-\infty,4)$.

Β2. **i)** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g=f+f^{-1}$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=4-\frac{1}{x}+\frac{1}{4-x}$, $x\in(0,4)$ (μονάδες 6).

Μονάδες 10

Β3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g του ερωτήματος Β2 στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\alpha x^2+\beta$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,
- η f παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$ τοπικό μέγιστο το 0,
- η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στη θέση $x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega=\frac{\pi}{4}$ rad.

Γ1. **i)** Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=3$ (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^3+3x-2$, $x\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+f(x)\right)}{|f(x)|\left(x-1\right)^2}$$

Μονάδες 5

Γ4. Να επιλύσετε στο διάστημα $[0,+\infty)$ την εξίσωση $f\left(e^x\right)=f\left(x+1\right)$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $xf'(x)-f(1-x)=x^2+2x-3$ για κάθε $x\in[0,1]$,
- $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)+f'(1)=3.$$

Μονάδες 6

Δ2. **i)** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\leq 3$ για κάθε $x\in[0,1]$ (μονάδες 5).

Μονάδες 11

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=3, x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ