**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**
**ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής $X$ ενός δείγματος μεγέθους $\nu$, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με $0$.

**Μονάδες 7**

**Α2.** Πότε μία συνάρτηση $f$ με πεδίο ορισμού $A$ λέγεται συνεχής;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η διακύμανση των παρατηρήσεων ενός δείγματος εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις του δείγματος.

**β.** Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς.

**γ.** Η παράγωγος της $f$ στο $x_0$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το $x$, όταν $x = x_0$.

**δ.** Αν $f$ παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $\Delta$, τότε ισχύει $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$.

**ε.** Αν μία συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $\Delta$ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του $\Delta$, τότε η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta$.

**Μονάδες 10**

**Α4.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλιπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

**α.** $(c)' = \cdots$

**β.** $(x^2)' = \cdots$

**Μονάδες 4**

## ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των ωρών που εργάζονται υπερωριακά 50 υπάλληλοι σε μία επιχείρηση κατά τη διάρκεια ενός μήνα.

| Πλήθος ωρών $x_i$ | Συχνότητα $\nu_i$ | Σχετική Συχνότητα $f_i\%$ | Αθροιστική Συχνότητα $N_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | … | … | … |
| 1 | 15 | … | … |
| 2 | 11 | … | … |
| 3 | 8 | … | … |
| 4 | 6 | … | 50 |
| Σύνολο | 50 | 100 | |

**Β1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

**Μονάδες 10**

**Β2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

**Μονάδες 5**

**Β3.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ του δείγματος.

**Μονάδες 4**

**Β4. α)** Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες. (μον. 3)

**β)** Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, να βρείτε τη νέα μέση τιμή. (μον. 3)

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha, \quad x \in \mathbb{R}$ και $\alpha$ σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων της $f$ ως συνάρτηση του $\alpha$ (μον. 4) και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού $\alpha$, αν το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων της $f$ είναι $-8$. (μον. 4)

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Για $\alpha = -12$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f$ στο σημείο $M(1, f(1))$.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Για $\alpha = -12$, να δείξετε ότι $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda$ σταθερός πραγματικός αριθμός.

**Δ1.** Αν ισχύει $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$, να βρεθεί ο αριθμός $\lambda$.

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Για $\lambda = -4$, να μελετηθεί η $f$ ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Για $\lambda = -4$, να προσδιοριστεί το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)}$$

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Για $\lambda = -4$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}$$

**Μονάδες 8**

## ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**